UMinho | 2009

Isabel Cristina da Silva Duarte **Teoria Qualitativa de Matrizes: caso da característica mínima**

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Isabel Cristina da Silva Duarte

Teoria Qualitativa de Matrizes: caso da característica mínima

Julho de 2009

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Isabel Cristina da Silva Duarte

Teoria Qualitativa de Matrizes: caso da característica mínima

Tese de Mestrado em Matemática
Área de Especialização em Ensino

Trabalho efectuado sobre a orientação da
Professora Doutora Yulin Zhang

Julho de 2009

Agradecimentos

Para a elaboração deste trabalho, várias foram as pessoas que colaboraram, quer em termos científicos quer em termos pessoais. Pretendo deste modo demonstrar a minha gratidão para com essas pessoas.

O meu maior agradecimento vai para a minha orientadora - Doutora Yulin Zhang - que, com a sua incansável disponibilidade, tornou este projecto possível.

Gostaria de agradecer às pessoas que pela sua incansável disponibilidade me ajudaram na redacção deste trabalho.

Aos meus professores do Mestrado, o meu agradecimento pelos conhecimentos científicos que me transmitiram.

Manifesto o meu agradecimento a todos os que contribuíram de forma mais ou menos directa para o desenvolvimento da dissertação.

A todos vós, o meu muito obrigada!

Resumo

Um padrão (padrão de sinais) é uma matriz com $*$'s e 0's ($+$'s, $-$'s e 0's). Naturalmente associado a um padrão (padrão de sinais) está um conjunto de matrizes cujas entradas são não nulas (positivas, negativas) precisamente nas posições dos $*$'s ($+$'s, $-$'s) do padrão (padrão de sinais).

A teoria qualitativa de matrizes ocupa-se da caracterização de padrões (padrões de sinais) que requerem ou admitem uma dada propriedade. Este tipo de estudo, independente dos elementos que compõem a matriz, evidencia propriedades estruturais das matrizes e é, assim, um excelente contributo para o conhecimento da estrutura das matrizes.

O estudo dos padrões de sinais é usado segundo várias perspectivas da álgebra linear, da combinatória e da economia. Existem muitos problemas de diversas áreas cuja resolução usa padrões de sinais, como por exemplo, problemas que se referem a mercados de produtos onde se pretende encontrar a melhor resposta que relacione preço e quantidade tendo em conta oferta e procura.

Uma questão que surge naturalmente quando se estudam padrões de matrizes é a de saber quais as possíveis características de uma matriz que tenha um determinado padrão ou padrão de sinais. Saber qual a característica máxima é um problema fácil e resolvido. Contrariamente, o estudo da característica mínima revelou-se um problema de grande dificuldade que ainda não está completamente resolvido, mas que tem aplicações, por exemplo no estudo de redes neuronais.

O objectivo do presente trabalho é apresentar vários resultados relativos à característica mínima de padrões, bem como várias técnicas utilizadas na abordagem destes problemas.

Abstract

A pattern (sign pattern) is a matrix whose entries are *'s and 0's. Naturally associated with a pattern (sign pattern) there is a set of matrices which are nonzero entries (positive, negative) precisely the positions of *'s and 0's (+'s and -'s) of the pattern (sign pattern).

A qualitative theory of matrices is based on the characterization of patterns that require or permit a given property. This type of study, regardless of the elements that make up of the matrix, shows structural properties of matrices and is, thus, an excellent contribution to the knowledge of the structure of the matrices.

The study of sign patterns is used based on multiple perspectives of linear algebra, combinatorics and economy. There are many problems in different areas whose resolution uses sign patterns, for example, problems that refer to markets of products where you can find the best answer that relates price and quantity considering supply and demand.

A question that arises naturally when studying patterns of matrices is to know what the possible characteristics of a matrix that has a certain pattern or sign pattern. To know the maximum rank is an easy and solved problem. Contrarily, the study of the minimum rank proved to be a problem of great difficulty that is not yet completely solved, but which has applications, for example, in study of neural networks.

The aim of this paper is to present several results in relation to the minimum rank of patterns, as well as various techniques used in addressing these problems.

Conteúdo

Lista de Notações

?	Entrada 0 ou $*$ de um padrão
$(2:1)$	Bloco 2×2 com apenas um $*$
$(3:1)$	Bloco 3×3 com apenas um $*$
A_p	Matriz obtida da matriz A apagando a p-ésima linha e coluna
$A(s\|t)$	Matriz resultante da matriz A quando se apaga a linha s e a coluna t
c_1	Menor número de entradas não nulas das colunas de um padrão
$c(A)$	Característica da matriz A
E(G)	Conjunto das arestas do grafo G
$\|G\|$	Ordem do grafo G
F_4	Padrão de incidência do Plano Projectivo de Fano
$\mathcal{G}(A)$	Grafo não orientado associado à matriz A
G'	Grafo obtido do grafo G apagando um único vértice e cada aresta a ele associado
G^i	Componente conexa de G
K_n	Grafo completo com n vértices
$K_{p,q}$	Grafo bipartido completo
$m(G)$	Característica mínima do garfo G
$mr(P)$	Característica mínima do padrão P
$mr^F(P)$	Característica mínima do padrão P sobre o corpo F
$MR(P)$	Característica máxima do padrão P
$MT(P)$	Dimensão triangular do padrão P
P_n	Caminho com n vértices
P^T	Padrão transposto do padrão P
p_{st}	Entrada de um padrão (linha s e coluna t)
r_1	Menor número de entradas não nulas das linhas de um padrão
$sgn(A)$	Padrão de sinais obtido substituindo cada entrada positiva (respectivamente, negativa, zero) de A por $+$ (respectivamente, $-$, 0)
$t(m,n,k)$	Maior triângulo de um padrão $P_{m\times n}$ com $mr(P)=k$
V(G)	Conjunto dos vértices do grafo G

Lista de Figuras

Introdução

Um padrão é uma matriz com $*$'s e 0's. Naturalmente associado a um padrão está um conjunto matrizes cujas entradas são não nulas precisamente nas posições dos $*$'s no padrão.

Em muitas situações é necessário estudar propriedades de matrizes baseadas apenas em informação combinatória, tal como o conhecimento do sinal das entradas da matriz ou as suas entradas nulas e não nulas. Para efeitos deste estudo define-se padrão de sinais como uma matriz cujas entradas são $+$'s, $-$'s ou 0's. O estudo dos padrões de sinais iniciou-se em 1947 com o economista P. Samuelson que o desenvolveu segundo várias perspectivas da álgebra linear, da combinatória e da economia. O estudo matemático iniciou-se em 1968 com L. Bassett, J. Maybee e J. Quirk. Existem muitos problemas de diversas áreas cuja resolução usa padrões de sinais, como por exemplo, o problema apresentado por Brualdi et al [8, pp. 1-4], que se refere a um mercado de produtos (bananas) cujo preço e quantidade são determinados pela intersecção de curvas de oferta e procura.

Dada uma propriedade matricial Q, dizemos que o padrão (ou padrão de sinais) P admite (respectivamente, requer) Q se alguma (respectivamente, todas) matriz com padrão P tem a propriedade Q. A teoria qualitativa de matrizes ocupa-se da caracterização de padrões (padrões de sinais) que requerem ou admitem uma dada propriedade Q. Este tipo de estudo, independente dos elementos que compõem a matriz, evidencia propriedades estruturais das matrizes e é, assim, um excelente contributo para o conhecimento da estrutura das matrizes.

Em 1995 [8] Brualdi e Shader publicaram um extenso estudo sobre padrões de sinais. Para uma pesquisa geral da bibliografia, ver Hall e Li [17].

Uma questão que surge naturalmente quando se estudam padrões de matrizes é a de saber quais as possíveis características de uma matriz que tenha um determinado padrão ou padrão de sinais. Saber qual a característica máxima é um problema fácil e resolvido. Contrariamente, o estudo da característica mínima revelou-se um problema de grande dificuldade que ainda não está completamente resolvido, mas que tem aplicações, por exemplo no estudo de redes neuronais, como se pode ver em [13]. Estudos recentes continuam a debruçar-se sobre este tópico [4, 10, 13, 17, 18, 19, 22, 26]. O objectivo do presente trabalho é apresentar vários resultados relativos à característica mínima de padrões, bem como várias técnicas utilizadas na abordagem destes problemas.

Esta dissertação inclui sete capítulos. No primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados prévios acerca de padrões e grafos que são necessários ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo dois referimos condições que nos dão um limite inferior e superior para a característica mínima dos padrões.

No capítulo três são apresentadas algumas considerações sobre a dimensão triangular de um padrão e a sua relação com a característica mínima sendo apresentado um exemplo em que a desigualdade entres estes dois valores é estrita (exemplo do Plano Projectivo de Fano).

No caso de matrizes simétricas podemos calcular a característica mínima usando grafos, como se refere no capítulo quatro. Neste capítulo iremos também fazer referência ao caso em que o grafo é uma árvore.

No capítulo cinco fazemos referência à discrepância entre o valor da característica mínima e da dimensão triangular, sendo que, quando esta discrepância é um, o caso já está estudado. Ainda neste capítulo, iremos iniciar a procura do menor padrão tal que a discrepância é dois. No entanto, tal caso não fica concluído, ficando um problema em aberto.

No sexto capítulo são apresentadas algumas conjecturas acerca do cálculo da característica mínima de padrões de sinais. São apresentados alguns resultados onde se refere que podemos calcular a característica mínima de padrões de sinais substituindo todas as entradas não nulas do padrão por números racionais. Ainda neste capítulo, apresentamos um exemplo que contraria as conjecturas formuladas e que refuta a veracidade destas conjecturas.

Por último, no sétimo capítulo iremos enunciar alguns problemas em aberto que serão tema de trabalho para futura investigação na área de Teoria Qualitativa de Matrizes.

Sendo este um trabalho de síntese, optou-se por incluir apenas algumas demonstrações mais significativas e que não requeriam conhecimentos fora do âmbito do trabalho. Nos casos em que não se incluem as demonstrações é feita referência à literatura onde podem ser encontradas as demonstrações dos resultados apresentados.

Capítulo 1

Preliminares

Para o desenvolvimento deste trabalho, torna-se necessário a apresentação de alguns conceitos e resultados.

1.1 Padrões

Definição 1.1 *Um* padrão *é uma matriz com* $*$*'s e 0's.*

Exemplo 1.2

$$P = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Definição 1.3 *Um* padrão de sinais *é uma matriz cujas entradas são* $+$, $-$ *ou 0.*

Exemplo 1.4

$$P = \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ 0 & 0 & - \\ - & + & + \end{bmatrix}$$

Definição 1.5 *Seja P um padrão. Diz-se que uma matriz A tem padrão P se tiver as mesmas dimensões de P e se substituindo as entradas não nulas por $*$ obtemos P.*

Exemplo 1.6

$$P = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Definição 1.7 *Seja P um padrão de sinais. Diz-se que uma matriz real A tem padrão de sinais P se tiver as mesmas dimensões de P e se substituindo as entradas positivas por $+$ e as negativas por $-$ obtemos P.*

Exemplo 1.8

$$P = \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ 0 & 0 & - \\ - & + & + \end{bmatrix} \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 1.9 *Um padrão diz-se* completo *quando todas as entradas são $*$.*

Exemplo 1.10

$$P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Definição 1.11 *Um padrão diz-se* triangular completo *quando todas as* *entradas acima ou abaixo da diagonal principal são 0 e as restantes entradas são todas $*$.*

Exemplo 1.12

$$P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Observação 1.13 *Muitos conceitos e notações das matrizes tais como irredutibilidade, transposição, submatrizes e multiplicação por uma matriz de permutação são independentes dos elementos da matriz, pelo que podem ser utilizados sem ambiguidade, no contexto de padrões, o que faremos ao longo deste trabalho sem mais comentários.*

Definição 1.14 *Seja P um padrão. A* característica mínima *de P é*

$$mr(P) = \min_{A \in \mathcal{P}} c(A),$$

onde $c(A)$ representa a característica de A.

Definição 1.15 *Um k-*triângulo *é um padrão $k \times k$ que é permutacionalmente equivalente a um padrão triangular cujas entradas da diagonal são $*$'s.*

Exemplo 1.16 *O padrão*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

é um 3-triângulo pois é permutacionalmente equivalente a

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Definição 1.17 *Um subpadrão (ou subpadrão de sinais) é uma submatriz de um padrão.*

Exemplo 1.18 *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{*} & 0 & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

O subpadrão de P contido nas linhas 1, 2 e colunas 1, 3, 4 é

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Definição 1.19 *Diz-se que um padrão P contém um k-triângulo se tem um subpadrão que é um k-triângulo.*

Exemplo 1.20 *O padrão*

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{*} & 0 & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * \\ \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} & 0 \\ \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{*} & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

contém um 3-triângulo, concretamente o subpadrão contido nas linhas 1, 3, 4 e colunas 1, 3, 4

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Observação 1.21 *Se um padrão P contém um k-triângulo então necessariamente contém um $(k-1)$-triângulo.*

Definição 1.22 *Um padrão diz-se* semi-standard *se*

1. *Não tem linhas nem colunas nulas;*

2. *Não tem linhas (colunas) iguais.*

Definição 1.23 *Um padrão diz-se* standard *se*

1. *Não tem linhas nem colunas nulas;*

2. *Não tem linhas (colunas) iguais;*

3. *Não tem linhas nem colunas com apenas um $*$;*

4. *Não tem linhas nem colunas só com $*$'s.*

Reconhecer a presença de k-triângulos, $k \leq 6$, pode ser simplificado nos padrões semi-standard.

Lema 1.24 *[23] Um padrão semi-standard contém um*

1. *2-triângulo se e só se contém um 0;*

2. *3-triângulo se e só se contém uma linha com dois 0's*

   ou

   contém um 3-triângulo se e só se contém um padrão $(2:1)$, isto é, um bloco 2×2 com apenas um $*$;

3. *4-triângulo se e só se contém um bloco nulo 2×2;*

4. *5-triângulo se e só se contém um padrão $(3:1)$, isto é, um bloco 3×3 com apenas um $*$;*

5. *6-triângulo se e só se contém um padrão permutacionalmente equivalente a*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & ? \end{bmatrix},$$

onde ? representa uma entrada 0 ou $*$.

Demonstração:

1.

$\Rightarrow$

Trivial

$\Leftarrow$

Consideremos um padrão com um 0. Sem perda de generalidade, suponhamos que o 0 está na posição (1,1).

Como um padrão semi-standard não pode ter linhas nem colunas nulas, deve ter um $*$ na mesma linha e outro $*$ na mesma coluna que tem o 0. Podemos permutar as linhas e colunas do padrão de modo que o padrão tenha nas duas primeiras linhas e duas primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & ? \end{bmatrix}$$

Ou seja, o padrão contém um 2-triângulo.

2.

$\Rightarrow$

Trivial

$\Leftarrow$

Consideremos um padrão com dois 0's na mesma linha. Sem perda de generalidade, suponhamos que estes 0's ocorrem nas colunas 1 e 2 do padrão.

Como um padrão semi-standard não pode ter colunas iguais, deve ocorrer $[\ 0 \quad * \ ]$ ou $[\ * \quad 0\ ]$ nas colunas 1 e 2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\ 0 \quad * \ ]$. Podemos permutar as linhas do padrão de modo que o padrão tenha nas duas primeiras linhas e duas primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

ou seja, um padrão $(2:1)$ (padrão 2×2 com apenas um $*$).

Como um padrão semi-standard não pode ter linhas nem colunas nulas, deve ter um $*$ na primeira linha e outro $*$ na primeira coluna. Podemos permutar as linhas e colunas do padrão de modo que o padrão tenha nas três primeiras linhas e três primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & ? \\ * & ? & ? \end{bmatrix}$$

Ou seja, o padrão contém um 3-triângulo.

3.

$\Rightarrow$

Trivial

$\Leftarrow$

Sem perda de generalidade, suponhamos que o bloco nulo 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ocorre nas duas primeiras linhas e duas primeiras colunas do padrão.

Como um padrão semi-standard não pode ter linhas iguais, deve ocorrer $[\ 0 \quad * \ ]^T$ ou $[\ * \quad 0\ ]^T$ nas linhas 1 e 2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\ 0 \quad * \ ]^T$. Podemos permutar as colunas do padrão de modo que o padrão tenha nas duas primeiras linhas e três primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Analogamente, as colunas 1 e 2 não podem ser iguais. Assim, deve ocorrer $[\ 0\ \ *\ ]$ ou $[\ *\ \ 0\ ]$ nas colunas 1 e 2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\ 0\ \ *\ ]$. Podemos permutar as linhas do padrão de modo que o padrão tenha nas três primeiras linhas e três primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & * & ? \end{bmatrix}$$

Dado que um padrão semi-standard não tem linhas nem colunas nulas, deve existir um $*$ na primeira linha e outro $*$ na primeira coluna. Permutando as linhas e colunas obtemos um padrão que tem nas quatro primeiras linhas e quatro primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & ? \\ 0 & * & ? & ? \\ * & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Ou seja, o padrão contém um 4-triângulo.

4.

$\Rightarrow$

Trivial

$\Leftarrow$

Um padrão $(3:1)$ é um padrão 3×3 com apenas um $*$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o padrão $(3:1)$ ocorre nas três primeiras linhas e três primeiras colunas do padrão com o $*$ na posição $(3,3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Como o padrão é semi-standard, não pode ter linhas iguais. Assim, nas linhas 1 e 2 deve ocorrer $[\ 0\ \ *\ ]^T$ ou $[\ *\ \ 0\ ]^T$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\ 0 \quad * \ ]^T$. Podemos permutar as colunas do padrão de modo que o padrão tenha nas três primeiras linhas e quatro primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & ? \end{bmatrix}$$

Analogamente, as colunas 1 e 2 não podem ser iguais. Assim, nas colunas 1 e 2 deve ocorrer $[\ 0 \quad * \ ]$ ou $[\ * \quad 0 \ ]$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\ 0 \quad * \ ]$. Podemos permutar as linhas do padrão de modo que o padrão tenha nas quatro primeiras linhas e cinco primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & * & ? & ? \\ 0 & * & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Dado que um padrão semi-standard não tem linhas nem colunas nulas, deve existir um $*$ na primeira linha e outro $*$ na primeira coluna. Permutando as linhas e colunas obtemos um padrão que tem nas cinco primeiras linhas e cinco primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & * & ? & ? \\ 0 & * & ? & ? & ? \\ * & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Ou seja, o padrão contém um 5-triângulo.

5.

$\Rightarrow$

Trivial

$\Leftarrow$

Sem perda de generalidade, suponhamos que o padrão

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & ? \end{bmatrix}$$

ocorre nas quatro primeiras linhas e quatro primeiras colunas.

Como o padrão é semi-standard, não pode ter linhas iguais. Assim, nas linhas 1 e 2 deve ocorrer $[\begin{array}{cc} 0 & * \end{array}]^T$ ou $[\begin{array}{cc} * & 0 \end{array}]^T$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\begin{array}{cc} 0 & * \end{array}]$.

Analogamente, as colunas 1 e 2 não podem ser iguais. Assim, nas colunas 1 e 2 deve ocorrer $[\begin{array}{cc} 0 & * \end{array}]$ ou $[\begin{array}{cc} * & 0 \end{array}]$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre $[\begin{array}{cc} 0 & * \end{array}]$.

Dado que um padrão semi-standard não tem linhas nem colunas nulas, deve existir um $*$ na primeira linha e outro $*$ na primeira coluna. Permutando as linhas e colunas obtemos um padrão que tem nas seis primeiras linhas e seis primeiras colunas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & * & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? & ? & ? \\ 0 & * & ? & ? & ? & ? \\ * & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Ou seja, o padrão contém um 6-triângulo.

Exemplo 1.25 *Iremos apresentar um exemplo para cada um dos casos referidos no Lema.*

1. *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} * & * & \boldsymbol{0} \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Este padrão tem um 0 na primeira linha e contém o subpadrão

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

Pelo Lema, o padrão P contém um 2-triângulo.

2. Considere-se o padrão

$$P = \begin{bmatrix} * & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & \boldsymbol{*} & * & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Este padrão contém um subpadrão $(2:1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo Lema, o padrão P contém um 3-triângulo.

3. Considere-se o padrão

$$P = \begin{bmatrix} * & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * \\ * & \boldsymbol{0} & 0 & \boldsymbol{0} \\ 0 & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

Este padrão tem um bloco nulo 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo Lema, o padrão P contém um 4-triângulo.

4. Considere-se o padrão

$$P = \begin{bmatrix} * & \boldsymbol{0} & 0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 \\ * & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{*} \end{bmatrix}$$

Este padrão contém um subpadrão $(3:1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Pelo Lema, o padrão P contém um 5-triângulo.

5. Considere-se o padrão

$$P = \begin{bmatrix} * & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{*} & 0 & \boldsymbol{*} & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{*} & 0 \\ * & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & * & \boldsymbol{0} & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Pelo Lema, como o padrão P contém um subpadrão

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permutacionalmente equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & ? \end{bmatrix},$$

o padrão P contém um 6-triângulo.

1.2 Grafos

Definição 1.26 *Um* grafo G *é um par ordenado* $(V(G), E(G))$ *constituído por um conjunto* $V(G)$ *designado por* conjunto de vértices *e por um conjunto* $E(G)$ *de subconjuntos de* $V(G)$ *com dois elementos, designado por* conjunto de arestas*. O número de vértices em* $V(G)$ *é a* ordem *do grafo e denota-se por* $|G|$*.*

Exemplo 1.27

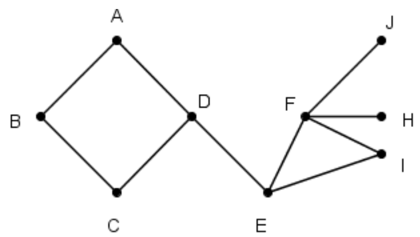


Figura 1.1: Grafo G

Definição 1.28 *Um vértice é* incidente *numa aresta se for um elemento dessa aresta.*

Exemplo 1.29 *O vértice A do grafo G é incidente na aresta AD.*

Definição 1.30 *O* grau *de um vértice é o número de arestas às quais o vértice é incidente.*

Exemplo 1.31 *O grau do vértice F do grafo G é 4.*

Definição 1.32 *Um* caminho *é uma sequência de vértices de um grafo no qual cada par de vértices sucessivos é uma aresta do grafo.*

Exemplo 1.33 *ABCDEDA é um caminho do grafo G.*

Definição 1.34 *Um* caminho simples *é um caminho no qual nenhuma aresta aparece repetida.*

Designa-se por P_n o caminho simples com n vértices.

Exemplo 1.35 *ABCDE é um caminho simples do grafo G.*

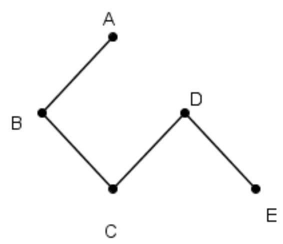


Figura 1.2: P_5

Definição 1.36 *Um* circuito *é um caminho que começa e termina no mesmo vértice.*

Exemplo 1.37 *ADEFIEDA é um circuito do grafo G.*

Definição 1.38 *Um* ciclo *é um circuito no qual o vértice inicial ocorre duas vezes e mais nenhum vértice aparece repetido.*

Exemplo 1.39 *ABCDA é um ciclo do grafo G.*

Definição 1.40 *Um grafo completo é um grafo em que todos os vértices estão ligados. Designa-se por K_n o grafo completo com n vértices.*

Exemplo 1.41

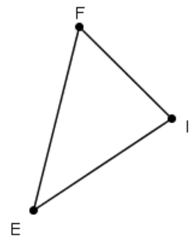


Figura 1.3: K_3

Definição 1.42 *Um grafo $G = (V(G), E(G))$ diz-se* bipartido *se o conjunto dos vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos U e W de tal modo que todas as arestas de $E(G)$ são incidentes num vértice de cada um dos conjuntos U e W. Se cada vértice de U está ligado com todos os vértices de W e vice-versa então o grafo é* bipartido completo *e designa-se por $K_{p,q}$ em que p é o cardinal de U e q é o cardinal de W.*

Exemplo 1.43

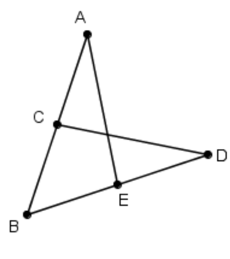


Figura 1.4: $K_{2,3}$

Definição 1.44 *Um grafo diz-se* conexo *se, dados dois vértices distintos, a* *e b, existe um caminho de a para b.*

Exemplo 1.45

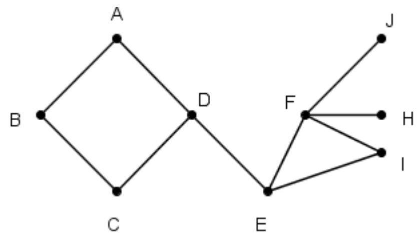


Figura 1.5: Grafo conexo

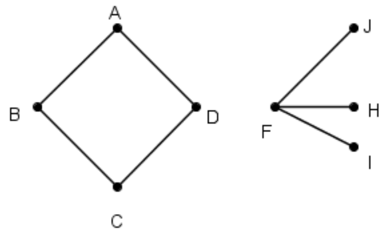


Figura 1.6: Grafo não conexo

Definição 1.46 *Um* vértice de articulação *é um vértice do grafo que quando removido torna o grafo desconexo.*

Exemplo 1.47 O vértice E do grafo G é um vértice de articulação.

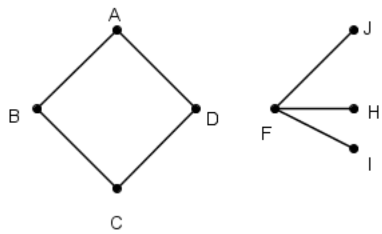


Figura 1.7: Grafo G' obtido de G quando se remove o vértice E

Definição 1.48 *Um* subgrafo *de um grafo* $(V(G), E(G))$ *é um grafo* $(V'(G), E'(G))$ *no qual* $V'(G) \subseteq V(G)$ *e* $E'(G)$ *é constituído por arestas de* $E(G)$ *que ligam apenas vértices de* $V'(G)$*.*

Exemplo 1.49

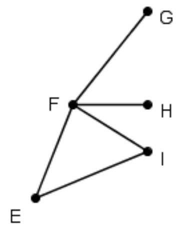


Figura 1.8: Subgrafo do grafo G

Definição 1.50 *Seja $S \subseteq V(G)$. O* subgrafo induzido por S *é o grafo com conjunto de vértices S e com conjunto de arestas constituído por todas as arestas de G que ligam vértices de S.*

Exemplo 1.51 *O subgrafo do exemplo anterior é induzido por $S = \{E, F, H, I, J\}$.*

Definição 1.52 *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e R a relação de equivalência definida em $V(G)$ por*

$$aRb \text{ se e só se } a = b \text{ ou há um caminho de } a \text{ para } b.$$

Chama-se componente *de um grafo G a qualquer subgrafo de G induzido por uma classe de equivalência da relação R.*

Exemplo 1.53

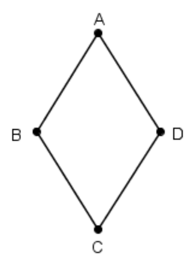


Figura 1.9: Componente do grafo G'

Observação 1.54 *Um grafo é conexo se e só se tem apenas uma componente.*

Observação 1.55 *Uma componente de um grafo é um subgrafo conexo.*

Definição 1.56 *Chama-se* árvore *a qualquer grafo conexo que não tenha ciclos.*

Exemplo 1.57

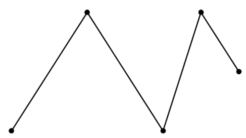


Figura 1.10: Árvore

Capítulo 2

Limites inferior e superior para a característica mínima

Neste capítulo, serão apresentadas algumas propriedades da característica mínima dos padrões. Neste âmbito vamos apresentar uma expressão para o limite inferior e o limite superior da característica mínima de padrões.

Serão apresentados ainda alguns resultados onde se particiona um padrão em subpadrões de modo a tornar mais fácil o cálculo da característica mínima do padrão original.

Todos os resultados apresentados são acompanhados de exemplos que ilustram a sua importância para o cálculo da característica mínima dos padrões.

2.1 Característica mínima

Como já referimos anteriormente, a *característica mínima* de um padrão P é

$$mr(P) = \min_{A \in \mathcal{P}} c(A),$$

onde $c(A)$ representa a característica de A.

Podemos também definir a característica máxima de um padrão.

Definição 2.1 *Seja P um padrão. A* característica máxima *de P é*

$$MR(P) = \max_{A \in \mathcal{P}} c(A).$$

Das definições pode concluir-se imediatamente o seguinte.

Proposição 2.2 *Se um padrão contém uma linha ou coluna nula esta pode ser apagada obtendo-se um padrão de menor dimensão com a mesma característica mínima. Similarmente, linhas ou colunas repetidas também podem ser apagadas sem se alterar a característica mínima [24]. Removendo a referida linha ou coluna, a dimensão do padrão diminui, obtendo-se assim um padrão mais simples de analisar.*

Observação 2.3 *O padrão de uma matriz pode ou não dar informações sobre determinadas propriedades da matriz. Consideremos, por exemplo, o caso da característica.*

Exemplo 2.4

a) Consideremos o padrão triangular completo de ordem 3

$$P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Neste caso, claramente a característica é 3.

b) Consideremos agora o padrão completo de ordem 3

$$P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Neste caso, já não temos essa informação como veremos a seguir.

b.1) Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz A tem as 3 linhas iguais, a característica de A é 1.

b.2) Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz A tem 2 linhas iguais e a terceira linha não é combinação linear das outras duas, a característica de A é 2.

b.3) Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Como as linhas da matriz A são linearmente independentes, a característica de A é 3.

Definição 2.5 *Seja P um padrão. Define-se* dimensão triangular *do padrão P como o valor máximo de k tal que o padrão P contém um k-triângulo. Este valor de k representa-se por $MT(P)$.*

2.2 Propriedades da característica mínima

Nesta secção, iremos referir algumas propriedades da característica mínima e enunciar alguns resultados acerca da característica mínima de padrões.

Observação 2.6 *Seja P um padrão $m \times n$.*
Se $mr(P) = k$ então $mr(P^T) = k$, porque isto é verdade para a característica de qualquer matriz. Assim, quando for conveniente pode considerar-se a transposta de um dado padrão em vez de se considerar o padrão dado e, pode-se, por exemplo, supor que $m \leq n$.

Os resultados que se seguem deduzem-se imediatamente a partir das definições.

1. *A característica de uma matriz é invariante por troca de linhas (ou colunas). Assim, também a característica mínima de um padrão é invariante por troca de linhas (ou colunas).*

2. [24] *Seja P um padrão $m \times n$. Sejam r_1 o menor número de entradas não nulas das linhas e c_1 o menor número de entradas não nulas das colunas de P. Um limite superior para a característica mínima é*

$$mr(P) \leq \begin{cases} n+1-r_1 \\ m+1-c_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.7 *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

O menor número de entradas não nulas das linhas do padrão P é 3 e das colunas é 2, isto é,

$$r_1 = 3 \text{ e } c_1 = 2.$$

Pela condição (2.1),

$$mr(P) \leq 3.$$

Se o padrão que consideramos é um k-triângulo, o cálculo da sua característica mínima é imediato, como é estabelecido no seguinte resultado.

3. *Se P é um k-triângulo, $mr(P) = k$.*

Exemplo 2.8 *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Este padrão é um 4-triângulo. Portanto, $mr(P) = 4$.

4. *Seja P um padrão que contém um k-triângulo. Assim,*

$$mr(P) \geq k. \tag{2.2}$$

Deste modo, a dimensão triangular é um limite inferior para a característica mínima, ou seja,

$$mr(P) \geq MT(P).$$

Exemplo 2.9 *Considere-se o padrão do exemplo 2.7*

$$P = \begin{bmatrix} * & * & 0 & * & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

O padrão P contém um padrão $(2:1)$. Então, pelo Lema 1.24 o padrão P contém um 3-triângulo.

Usando a condição (2.2), obtemos um limite inferior para a característica mínima do padrão P, isto é,

$$mr(P) \geq 3.$$

Mas, pelo exemplo 2.7,

$$mr(P) \leq 3.$$

Donde se conclui que

$$mr(P) = 3.$$

5. *Nos casos em que o limite superior é igual ao limite inferior tem-se*

$$mr(P) = MT(P).$$

Seguem-se alguns resultados acerca da característica mínima de padrões enunciados por Johnson e Zhang [24], onde podem ser consultadas algumas demonstrações.

Observação 2.10 *Sejam B uma matriz e P um padrão. A característica de uma submatriz da matriz B é limite inferior para a característica da matriz. Do mesmo modo, a característica mínima de um subpadrão do padrão P é limite inferior para a característica mínima do padrão.*

Proposição 2.11 *Se Q é um subpadrão de um padrão $P_{m\times n}$ então*

$$mr(Q) \leq mr(P).$$

Exemplo 2.12 *Considere-se o padrão*

$$P = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
* & * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & * \\
0 & * & * & 0 & * & * & 0 & 0 \\
* & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * \\
0 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\
\hline
* & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\
* & * & * & * & 0 & 0 & * & 0 \\
* & * & * & * & * & * & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Seja Q o subpadrão contido nas cinco primeiras linhas e cinco primeiras colunas do padrão P.

Sabemos, do exemplo 2.9, que

$$mr(Q) = 3.$$

Assim, o limite inferior para a característica mínima do padrão P é 3, ou seja,

$$mr(P) \geq 3.$$

Para obtermos um limite inferior para a característica mínima podemos usar o seguinte resultado.

Proposição 2.13 *Seja $P_{m\times n}$ um padrão da forma*

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

em que P_i é $m_i \times n$, $i = 1, 2$ e $\sum m_i = m$, ou

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix},$$

em que P_j é $m \times n_j$, $j = 1, 2$ e $\sum n_j = n$.
Então,

$$mr(P) \leq mr(P_1) + mr(P_2).$$

Exemplo 2.14 *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Sejam

$$P_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Utilizando o Lema 1.24 e as condições (2.1) e (2.2) facilmente se mostra que

$$mr(P_1) = 1 \text{ e } mr(P_2) = 2.$$

Donde,

$$mr(P) \leq 3.$$

Exemplo 2.15 *Considere-se o padrão do exemplo anterior.*

Sejam

$$P_1 = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Utilizando o Lema 1.24 e as condições (2.1) e (2.2) facilmente se mostra que

$$mr(P_1) = 1 \text{ e } mr(P_2) = 2.$$

Donde,

$$mr(P) \leq 3.$$

Observação 2.16 *Das proposições 2.11 e 2.13 segue-se que*

$$max\,\{mr(P_1), mr(P_2)\} \leq mr(P) \leq mr(P_1) + mr(P_2).$$

Em particular,

$$mr(P) \leq mr(P_1) + k,$$

sendo k o número de linhas (colunas) de P_2.

Na proposição 2.13 obtivemos a desigualdade

$$mr(P) \leq mr(P_1) + mr(P_2). \tag{2.3}$$

Nas proposições seguintes apresentamos alguns casos de igualdade na desigualdade (2.3).

Proposição 2.17 *Seja $P_{m\times n}$ um padrão da forma*

$$P = \begin{bmatrix} * & \cdots & \\ 0 & & \\ \vdots & P_1 & \\ 0 & & \end{bmatrix},$$

em que P_1 é $(m-1)\times(n-1)$.
Então,

$$mr(P) = 1 + mr(P_1).$$

Exemplo 2.18 *Considere-se o padrão*

$$P = \left[\begin{array}{c|ccccc} * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * & * \end{array}\right]$$

Seja

$$P_1 = \begin{bmatrix} * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Já sabemos do exemplo 2.8 que $mr(P_1) = 3$. Assim,

$$mr(P) = 1 + 3 = 4.$$

Vejamos de seguida que também temos uma igualdade quando ocorre no padrão uma "soma directa".

Proposição 2.19 *Seja $P_{m\times n}$ um padrão da forma*

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

em que P_k é $m_k \times n_k$, $k = 1, 2$, $\sum m_k = m$ e $\sum n_k = n$.
Então,

$$mr(P) = mr(P_1) + mr(P_2).$$

Exemplo 2.20 *Considere-se o padrão*

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \end{array}\right]$$

Sejam

$$P_1 = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Utilizando o Lema 1.24 e as condições (2.1) e (2.2) facilmente se mostra que $mr(P_1) = 2$ e que $mr(P_2) = 2$. Donde,

$$mr(P) = 2 + 2 = 4.$$

Na proposição 2.13 obtivemos um limite superior para a característica mínima de um padrão P quando este pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Mas, este resultado pode ser generalizado, como veremos no Lema seguinte.

Lema 2.21 *Seja P um padrão da forma*

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix},$$

em que P_i é $m_i \times n$, $i = 1, \ldots, p$ e $\sum m_i = m$.
Então,

$$mr(P) \leq \sum_{i=1}^{p} mr(P_i).$$

Exemplo 2.22 *Considere-se o padrão P*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \leftrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Pela condição (2.1),

$$mr(P) \leq 5.$$

Considerem-se os subpadrões P_1, P_2 e P_3 de P

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Utilizando o Lema 1.24 e as condições (2.1) e (2.2) facilmente se mostra que

$$mr(P_1) = 1,\ mr(P_2) = 1 \text{ e } mr(P_3) = 2.$$

Então, pelo Lema 2.21,

$$mr(P) \leq 4.$$

Como podemos ver através do exemplo apresentado, o Lema 2.21 deu-nos um valor para o limite superior da característica mínima menor que o limite superior encontrado com a condição (2.1).

Quando fazemos a partição de um padrão em padrões de menor ordem, como sugerido no Lema 2.21, fazemos-la do modo que nos é mais favorável, ou seja, de modo a obtermos nos subpadrões do padrão original linhas ou colunas nulas ou linhas (colunas) iguais. Esta linhas ou colunas podem ser apagadas sem se alterar a característica mínima destes subpadrões, obtendo-se assim padrões de ordem inferior e portanto mais fáceis de estudar.

Capítulo 3

Dimensão triangular

Neste capítulo vamos ver a relação entre a dimensão triangular e a característica mínima.

Apresentam-se alguns resultados acerca da dimensão triangular de padrões de Johnson e Zhang [24] e Barioli et al [3], onde podem ser consultadas algumas demonstrações. Os resultados são seguidos de exemplos que nos ajudam a perceber a sua importância.

Por fim, será apresentado o Plano Projectivo de Fano para exemplificar uma das propriedades apresentadas.

3.1 Propriedades

Dada uma matriz A, denota-se por $A(s|t)$ a matriz resultante de A quando se retira a linha s e a coluna t.

Como se refere na proposição 2.17, a característica mínima de um padrão que tem uma linha ou coluna com apenas um $*$ pode ser calculada à custa do subpadrão que se obtém eliminando essa linha e essa coluna. Na proposição 2.17, o elemento não nulo a que nos estamos a referir está na posição $(1,1)$. Mas, como a característica mínima de um padrão não se altera por troca de linhas ou colunas, a proposição mantém-se válida caso o elemento não nulo ocupe uma posição qualquer no padrão. Neste sentido, parte da próxima proposição é uma generalização da proposição 2.17. Por outro lado, os triângulos num padrão podem ser encontrados fazendo sucessivas eliminações, como também se refere na próxima proposição.

Proposição 3.1 *Seja P um padrão que tem uma linha s (ou coluna t) que tem exactamente uma entrada não nula, p_{st}.*
Então,

$$mr(P) = mr(P(s|t)) + 1$$

e

$$MT(P) = MT(P(s|t)) + 1.$$

Demonstração:

Suponhamos que o padrão P tem uma linha s (ou coluna t) que tem exactamente uma entrada não nula, p_{st}.

Como a característica mínima é invariante por troca de linhas ou colunas, podemos trocar linhas e colunas do padrão P de modo que a entrada não nula fique na posição $(1, 1)$. Portanto, a condição

$$mr(P) = mr(P(s|t)) + 1$$

é verificada pela proposição 2.17. E, a condição

$$MT(P) = MT(P(s|t)) + 1$$

é verificada trivialmente.

Exemplo 3.2 *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

A primeira coluna do padrão P tem exactamente uma entrada não nula na posição $(1,1)$. Retiramos a primeira coluna e a primeira linha do padrão P. Obtemos o padrão

$$Q = P(1|1) = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Este padrão tem uma linha com apenas uma entrada não nula na posição $(3,2)$. Então, repetimos o processo, retirando-se a terceira linha e a segunda coluna do padrão Q. Obtemos o padrão

$$Q(3|2) = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Utilizando o Lema 1.24 e as condições (2.1) e (2.2), concluímos que

$$mr(Q(3|2)) = 2.$$

Donde,

$$mr(Q) = 2 + 1 = 3.$$

E, portanto,

$$mr(P) = 3 + 1 = 4.$$

Observando o padrão $Q(3|2)$,

$$MT(Q(3|2)) = 2.$$

Donde,

$$MT(Q) = 2 + 1 = 3.$$

E, portanto,

$$MT(P) = 3 + 1 = 4.$$

Este exemplo ilustra como através da proposição é possível calcular a característica mínima e a dimensão triangular de um padrão por meio da redução a padrões de ordem menor.

Pela observação 2.6, podemos supor que dado um padrão $P_{m\times n}$, $m \leq n$. No caso do padrão ter um k-triângulo cuja ordem é igual a m também é imediato o cálculo da característica mínima do padrão.

Teorema 3.3 *Seja $P_{m\times n}$ um padrão, $m \leq n$.*
Então,

$$mr(P) = m \textit{ se e só se } P \textit{ contém um } m\textit{-triângulo.}$$

Demonstração:

$\Leftarrow$

Esta implicação é verificada, pois é o resultado 3.

$\Rightarrow$

Suponhamos que $mr(P) = m$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que P não tem colunas nulas.

Se $c_1(P) \geq 2$ então, pela condição (2.1), $mr(P) < m$. Portanto,

$$c_1(P) = 1.$$

Suponhamos agora que a entrada $(1,1)$ do padrão P é $*$ e que a primeira coluna tem apenas um $*$. Então, pela proposição 2.17,

$$mr(P) = 1 + mr(P_1),$$

em que P_1 é o padrão resultante de P apagando a primeira linha e a primeira coluna.

Portanto,

$$P_1 \text{ é um padrão } (m-1)\times(n-1) \text{ e } mr(P_1) = m-1.$$

Por indução,

$$P_1 \text{ contém um } (m-1)\text{-triângulo.}$$

Portanto, tendo em conta a entrada $*$ na primeira linha de P, obtemos um m-triângulo em P.

Exemplo 3.4 *Considere-se o padrão $P_{4\times 5}$*

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & 0 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * \end{bmatrix}$$

Este padrão contém um bloco nulo 2×2. Então, pelo Lema 1.24, P contém um 4-triângulo. Portanto, pelo Teorema 3.1, podemos concluir que

$$mr(P) = 4.$$

De seguida, apresenta-se um resultado que relaciona a característica mínima e a dimensão triangular de padrões com $MT(P) \leq 2$.

Teorema 3.5 *Seja P um padrão tal que $MT(P) \leq 2$. Então,*

$$mr(P) = MT(P).$$

Demonstração:

Considere-se que $MT(P) = 0$. Então o padrão P tem as entradas todas nulas. Donde,

$$mr(P) = 0 = MT(P).$$

Considere-se agora que $MT(P) > 0$. Neste caso, podemos retirar todas as linhas e colunas nulas de P pois isto não altera a dimensão triangular nem a característica mínima.

Para todos os problemas que envolvem a característica mínima de padrões é suficiente considerar padrões standard. Portanto, vamos apenas considerar padrões standard ao longo desta demonstração.

Considere-se que $MT(P) = 1$. Se o padrão P tivesse algum 0, dado que é standard, deveria ter um $*$ na mesma linha e um $*$ na mesma coluna que o zero. Assim, teria um bloco da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & ? \end{bmatrix},$$

onde ? representa uma entrada 0 ou $*$.

Deste modo, o padrão P continha um 2-triângulo. Assim, P tem de ser um padrão só com $*$'s.

O valor mínimo que a característica da matriz deste padrão com todas as entradas $*$ pode tomar é 1. Portanto,

$$mr(P) = 1 = MT(P).$$

Considere-se agora que $MT(P) = 2$. Se o padrão P tivesse dois 0's na mesma linha, dado que é standard, teria de conter um 3-triângulo, pois continha um bloco da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ * & 0 & ? \\ 0 & * & ? \end{bmatrix}$$

Dado que um padrão standard não pode ter linhas só com $*$'s, o padrão P tem exactamente um zero em cada linha. Então, P é um padrão quadrado e é permutacionalmente equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & * & \\ & & 0 & & & \\ & & & \cdots & & \\ & * & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Como $mr(P) \geq MT(P)$, tem-se

$$mr(P) \geq 2.$$

E, como $mr(P) \leq n + 1 - r_1$, tem-se

$$mr(P) \leq n + 1 - (n - 1) = 2.$$

Portanto,

$$mr(P) = 2 = MT(P).$$

Exemplo 3.6 *Considere-se o padrão*

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ * & * & 0 & * \end{bmatrix}$$

A dimensão triangular deste padrão é 2, ou seja,

$$MT(P) = 2.$$

Assim,

$$mr(P) = 2.$$

O teorema anterior é apenas válido para padrões tais que

$$MT(P) \leq 2.$$

Portanto, para padrões P com $MT(P) = 3$ não é válido, ou seja,

$$MT(P) = 3 \text{ não implica que } mr(P) = 3.$$

Um exemplo é o Plano Projectivo de Fano em que

$$MT(F_4) = 3 \text{ e } mr(F_4) = 4,$$

como iremos ver na próxima secção.

Por fim, temos um teorema com outro caso em que se dá a igualdade entre a característica mínima e a dimensão triangular de padrões $m \times n$ cuja característica mínima é igual à menor das dimensões do padrão.

Proposição 3.7 *Seja $P_{m \times n}$ um padrão, $n \leq m$. Se $mr(P) = n$ então*

$$mr(P) = MT(P).$$

3.2 Plano Projectivo de Fano

A desigualdade $mr(P) \geq MT(P)$ pode ser estrita. Um exemplo clássico é obtido com o Plano Projectivo de Fano.

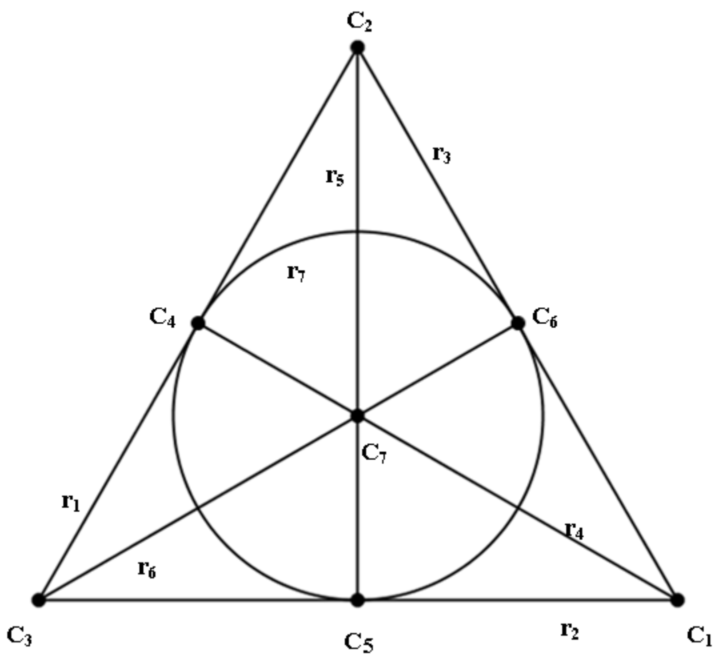


Figura 3.1: Plano Projectivo de Fano

A partir do Plano Projectivo de Fano ilustrado na figura 3.1 vamos construir um padrão, F_4. As linhas r_i e os vértices C_j do plano projectivo são tais que as entradas (i, j) da matriz são 0 se $C_j \in r_i$ e são $*$ se $C_j \notin r_i$.

Obtemos o seguinte padrão

$$F_4 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Observando o padrão semi-standard F_4 nota-se que existem alguns subpadrões $(2:1)$ mas não existe nenhum bloco nulo 2×2. Assim, pelo Lema 1.24, o maior triângulo em F_4 é um 3-triângulo. Deste modo,

$$MT(F_4) = 3 \leq mr(F_4).$$

Como temos 4 $*$'s em cada linha e em cada coluna do padrão F_4 e $mr(F_4) \leq n + 1 - r_1$,

$$mr(F_4) \leq 7 + 1 - 4 = 4.$$

Portanto,

$$3 \leq mr(F_4) \leq 4.$$

Mas, de facto,

$$mr(F_4) = 4 \ ([24])$$

mesmo sem existir um 4-triângulo.

Neste exemplo apercebemos-nos da diferença entre padrão e matriz. Dada uma matriz, se a característica é 4 quer dizer que temos quatro linhas ou quatro colunas linearmente independentes. Mas, neste exemplo, quaisquer quatro linhas ou quatro colunas que peguemos são linearmente dependentes, só havendo conjuntos de três linhas linearmente independentes. No entanto, a característica mínima é 4 e não 3.

Capítulo 4

Matrizes simétricas

Dada uma matriz real $n \times n$ simétrica $A = [a_{ij}]$, podemos definir um grafo $\mathcal{G}(A)$ com n vértices $1, 2, \ldots, n$ e arestas $\{i, j\}$ se e só se $a_{ij} \neq 0$.

Este grafo, chamado *grafo* $\mathcal{G}(A)$ *de* A, é útil para descrever um padrão de entradas nulas e não nulas. A informação das entradas da diagonal de A não está contida em $\mathcal{G}(A)$.

Dado um grafo G de n vértices, definimos a *característica mínima de um grafo*

$$m(G) = \min \{c(A) : A = A^T, \mathcal{G}(A) = G\}.$$

4.1 Característica mínima de matrizes simétricas

Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$. Seja G um grafo com n vértices. Ter $\mathcal{G}(A) = G$ significa que $a_{ij} \neq 0$ se e só se (i, j) é uma aresta do grafo G. Os vértices de G são implicitamente etiquetados de acordo com as linhas (colunas) de A.

A seguir apresentam-se alguns resultados relativos a $m(\cdot)$. Estes resultados são de Nylen [26] e Fallat e Hogben [14], onde podem ser consultadas algumas demonstrações.

Proposição 4.1

1. *Seja G um grafo conexo com k vértices, $1 \leq k \leq 2$.*
Então,

$$m(G) = k - 1.$$

2. *Seja G um grafo não conexo, com componentes conexas G^i, $i = 1, \ldots, k$.*
Então,

$$m(G) = m(G^1) + \ldots + m(G^k).$$

3. *Seja G' um grafo obtido de G apagando um único vértice e cada aresta nele incidente.*
Então,

$$m(G') + 2 \geq m(G) \geq m(G').$$

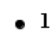
4. *Seja G' um grafo obtido de G apagando uma única aresta de G.*
Então,

$$m(G') + 1 \geq m(G) \geq m(G') - 1.$$

Exemplo 4.2 *Iremos apresentar um exemplo para as duas primeiras alíneas da proposição anterior.*

Nos exemplos que se seguem, ? representa uma entrada nula ou não nula e $*$ representa uma entrada não nula da matriz.

1. *Considere-se o seguinte grafo G_1 com apenas um vértice*



A característica mínima deste grafo é

$$m(G_1) = 1 - 1 = 0.$$

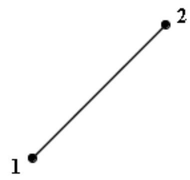
Seja A_1 uma matriz simétrica 1×1 com grafo G_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}$$

Como $m(G_1) = 0$, *então*

$$mr(A_1) = 0.$$

Considere-se agora o grafo G_2 *com dois vértices*



A característica mínima deste grafo é

$$m(G_2) = 2 - 1 = 1.$$

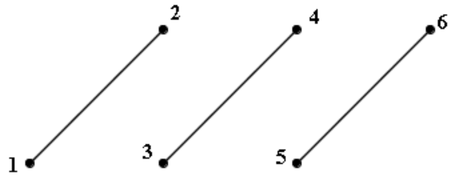
Seja A_2 *uma matriz simétrica* 2×2 *com grafo* G_2

$$A_1 = \begin{bmatrix} ? & * \\ * & ? \end{bmatrix}$$

Como $m(G_2) = 1$, *então*

$$mr(A_2) = 1.$$

2. *Considere-se o seguinte grafo* G *não conexo*



Este grafo não conexo tem 3 componentes conexas, $G^i, i = 1, 2, 3$. *Assim,*

$$m(G) = \sum_{i=1}^{3} G^i = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Seja A uma matriz simétrica 6×6 com grafo G

$$A = \begin{bmatrix} ? & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & ? \end{bmatrix}$$

Como $m(G) = 3$, então

$$mr(A) = 3.$$

Seja A_p a matriz obtida de A apagando a p-ésima linha e coluna. Segue-se uma proposição que mostra que dada uma matriz A com $c(A) = k$,

$$c(A_p) \neq k - 1.$$

Proposição 4.3 *Suponhamos que $\mathcal{G}(A) = G$ e que $c(A) = m(G) = k$. Então,*

$$c(A_p) = k \text{ ou } c(A_p) = k - 2 \text{ para todo } p.$$

Exemplo 4.4 *Seja C um ciclo simples com n vértices, $n \geq 3$. Então,*

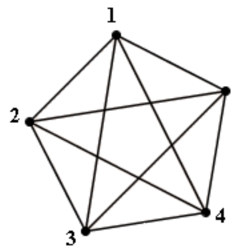
$$m(C) = n - 2.$$

Como a característica mínima de um grafo é a soma das características mínimas das suas componentes conexas, apenas precisamos de determinar a característica mínima de grafos conexos.

Seguem-se mais algumas observações relativas à característica mínima dos grafos.

Observação 4.5 *Para $n \geq 2$, $m(K_n) = 1$, independentemente do conjunto sob o qual estamos a trabalhar. Se G é um grafo conexo, $m(G) = 1$ implica que $G = K_{|G|}$.*

Exemplo 4.6 *Considere-se, em $\mathbb{R}$, o grafo completo K_5*



Este grafo tem característica mínima 1.

Seja A uma matriz simétrica 5×5 com grafo K_5

$$A = \begin{bmatrix} ? & * & * & * & * \\ * & ? & * & * & * \\ * & * & ? & * & * \\ * & * & * & ? & * \\ * & * & * & * & ? \end{bmatrix}$$

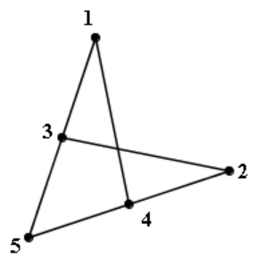
Como $m(K_5) = 1$, então

$$mr(A) = 1.$$

Quando o grafo é bipartido temos o seguinte:

Observação 4.7 *$m(K_{p,q}) = 2$, para todo $p, q \in N$, excepto $p = q = 1$.*

Exemplo 4.8 *Considere-se o grafo $K_{2,3}$*



O conjunto V dos vértices de $K_{2,3}$ é

$$\{1,2,3,4,5\}.$$

Pela observação anterior,

$$m(K_{2,3}) = 2.$$

Seja A uma matriz simétrica 5×5 com grafo $K_{2,3}$

$$A = \begin{bmatrix} ? & 0 & * & * & * \\ 0 & ? & * & * & * \\ * & * & ? & 0 & * \\ * & * & 0 & ? & * \\ * & * & * & * & ? \end{bmatrix}$$

Como $m(K_{2,3}) = 2$, então

$$mr(A) = 2.$$

Seja $m^F(G)$ a notação utilizada para referir a característica mínima do grafo G sobre o corpo F.

Observação 4.9 *Para todo o corpo F e grafo G,*

$$m^F(G) \leq |G| - 1.$$

A partir desta observação podemos concluir que toda a matriz simétrica $A_{n \times n}$ tem característica mínima

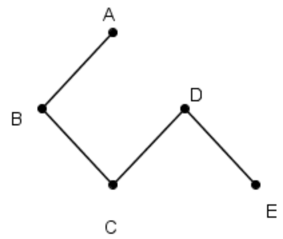
$$mr(A) \leq n - 1.$$

Quando o grafo é um caminho temos o seguinte.

Observação 4.10 *Para todo o corpo F,*

$$m^F(P_n) = n - 1.$$

Exemplo 4.11 *Considere-se o grafo P_5 sobre $\mathbb{R}$*



A característica mínima de P_5 é

$$m(P_5) = 5 - 1 = 4.$$

Quando o corpo sobre o qual estamos a trabalhar é o corpo dos números reais tem-se o seguinte.

Observação 4.12 *Se*

$$m^{\mathbb{R}}(G) = |G| - 1,$$

então G é um caminho.

Além disso,

Observação 4.13 *Para todo o corpo F,*

$$m^F(G) = |G| - 1 \text{ se e só se } G = P_{|G|}.$$

A seguir vamos calcular $m(G)$ sendo G uma árvore. A existência de um vértice p tal que

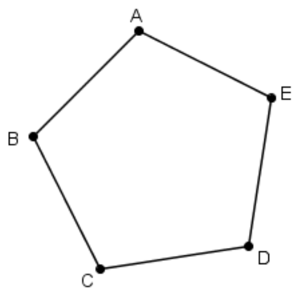
$$m(G) = m(G \setminus \{p\}) + 2 \tag{4.1}$$

é essencial.

Considerando o exemplo 4.4, deduz-se que para ciclos simples tais vértices não existem. Contudo, todo o vértice p de um ciclo simples satisfaz

$$m(C) = m(C \setminus \{p\}). \tag{4.2}$$

Exemplo 4.14 *Considere-se o seguinte grafo G com 5 vértices*



Como o grafo G é um ciclo simples,

$$m(G) = 5 - 2 = 3.$$

Apague-se um vértice qualquer do grafo G, por exemplo, o vértice A. Obtemos o caminho com 4 vértices P_4

A característica mínima de P_4 é

$$m(P_4) = 4 - 1 = 3.$$

Donde,

$$m(G) = m(G \setminus \{A\}).$$

4.2 Árvores

A seguir é apresentado o caso em que o grafo G é uma árvore, que será representada por T.

Seja T uma árvore com n vértices ($n \geq 3$), representados pelos inteiros $1, \ldots, n$, e seja p um vértice de T. Depois de apagado o vértice p e todas as arestas de T incidentes em p, obtemos um grafo acíclico, possivelmente desconexo,

$$T_p = T \setminus \{p\}.$$

Denotemos as componentes conexas de T_p por

$$T_p^1, \ldots, T_p^k.$$

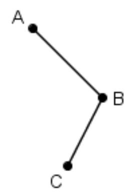
Para $j = 1, \ldots, k$, todos os vértices de $j \geq 2$ destas componentes conexas T_p^i têm grau 2 ou menor, sendo este o grau em T antes de apagado p. Ao inteiro j chama-se *índice de articulação.*

A seguir apresentam-se alguns resultados relativos a grafos que são árvores. Estes resultados são de Nylen [26] e de Chenette et al [11], onde podem ser consultadas algumas demonstrações.

Comecemos por enunciar um lema que garante a existência de vértices de articulação.

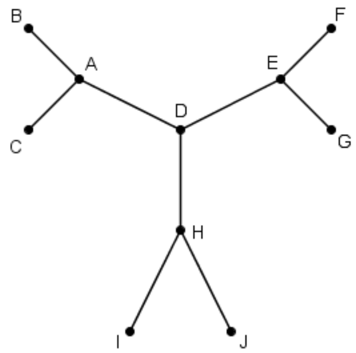
Lema 4.15 *Toda a árvore T com $n \geq 3$ vértices tem um vértice de articulação.*

Exemplo 4.16 *Considere-se uma árvore com 3 vértices.*



O vértice B desta árvore é um vértice de articulação.

Considere-se agora uma árvore com 10 vértices.



Os vértices A, D, E e H desta árvore são vértices de articulação.

O seguinte teorema mostra-nos a importância dos vértices de articulação.

Teorema 4.17 *Seja T uma árvore com três ou mais vértices. Seja p um vértice de articulação de T de índice j.*

Se $j = 2$, então existe A tal que

$$\mathcal{G}(A) = T \text{ e } m(T) = c(A) = c(A_p) + 2.$$

Se $j > 2$, então todo o A tal que

$$\mathcal{G}(A) = T \text{ e } c(A) = m(T)$$

tem a propriedade

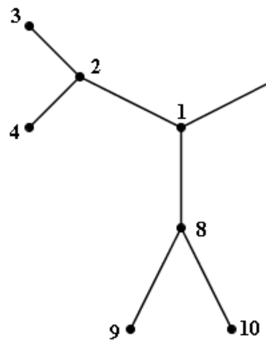
$$c(A) = c(A_p) + 2.$$

Mas, há uma fórmula recursiva para $m(T)$, tornando-o mais fácil de calcular para uma dada árvore. Essa fórmula é apresentada no seguinte corolário.

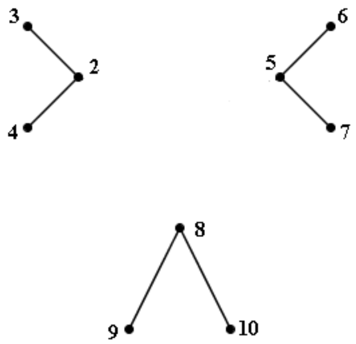
Corolário 4.18 *Sejam T uma árvore e p um vértice de articulação de T. E sejam $T_p^1, \ldots, T_p^k$ componentes conexas de $T \setminus \{p\}$. Então*

$$m(T) = m(T_p^1) + \cdots + m(T_p^k) + 2. \tag{4.3}$$

Exemplo 4.19 *Considere-se a seguinte árvore T*



Eliminando o vértice de articulação 1, obtemos as seguintes componentes conexas de $T \setminus \{1\}$



As componentes conexas obtidas, T_1^i, $i = 1, 2, 3$, são grafos P_3. Como $m(P_3) = 2$, tem-se

$$m(T) = (2 + 2 + 2) + 2 = 8.$$

Tipicamente, as árvores têm muitos vértices de articulação diferentes. Portanto, a decomposição (4.3) pode ser feita de várias maneiras. No entanto, a função $m(\cdot)$ está bem definida. Assim, a escolha de um vértice de articulação não afecta o valor da parte direita da equação (4.3).

Corolário 4.20 *A relação recursiva definida em árvores por*

$$f(T) = f(T_p^1) + \cdots + f(T_p^k) + 2,$$

sendo p um vértice de articulação, com condição "inicial"$f(T) = n-1$ onde T tem n vértices, $n = 1, 2$, tem uma única solução, $m(\cdot)$.

Gerry Wiener [28] mostrou que se A é uma matriz real simétrica $n \times n$ com grafo $\mathcal{G}(A) = T$ uma árvore e $c(A) \leq n-2$, então existe p tal que

$$c(A) = c(A_p) + 2.$$

Mais tarde, Nylen enunciou um teorema onde dá informações acerca dos índices de p no caso de $c(A) = m(T)$.

Teorema 4.21 *Seja T uma árvore. Seja A uma matriz real simétrica tal que $\mathcal{G}(A) = T$ e $c(A) = m(T)$. Seja q um vértice de T com grau $k \geq 3$. Então,*

$$c(A) = c(A_q) + 2$$

ou

existem $k-2$ vértices r adjacentes a q tais que $c(A) = c(A_r) + 2$.

O método para calcular a característica mínima de uma árvore aqui apresentado foi desenvolvido por Nylen [26] em 1996, como já referimos. A partir dessa altura, vários investigadores se interessaram pelo tema e, em 2007, Chenette et al [11] mostraram que a característica mínima de uma árvore é independente do corpo sobre o qual estamos a trabalhar.

Capítulo 5

Discrepância entre característica mínima e dimensão triangular

Define-se *discrepância entre característica mínima e dimensão triangular* como a diferença entre os valores da característica mínima e da dimensão triangular de um padrão P.

Um exemplo de um padrão em que $mr(P) > MT(P)$ é o padrão 7×7 resultante do Plano Projectivo de Fano. Mas, não está provado que este exemplo seja único.

Entre os exemplos em que a diferença entre a característica mínima e a dimensão triangular é 1, destaca-se o Plano Projectivo de Fano, pois

$$mr(F_4) - MT(F_4) = 1.$$

Mas, poderá haver mais exemplos, sendo este um problema ainda em aberto.

Define-se

$$t(m,n,k) = \min_{\substack{P_{m\times n} \\ mr(P)=k}} MT(P),$$

como sendo o maior triângulo de um padrão $m \times n$ com $mr(P) = k$.

Tem-se que $t(7,7,4) = 3$, $t(7,7,5) = 4$ e $t(7,7,6) = 5$. E, observando as tabelas que se encontram na última secção deste capítulo reparamos que estes valores de m e n são os mais pequenos para os quais há discrepância entre o valor da característica mínima e o da dimensão triangular.

Portanto, os mais pequenos valores de m, n e k para os quais a diferença é 1, isto é,

$$t(m,n,k) = k - 1,$$

são $m = n = 7$ e $k = 4$, 5 ou 6.

Mas há ainda vários problemas em aberto, entre os quais:

1. Quais são os mais pequenos valores de m, n e k para os quais a diferença é dois?

2. E diferença três?

3. E diferença $j \geq 4$?

Pode colocar-se ainda a seguinte questão: Existe um limite superior para as dimensões do padrão e para o valor de k para que um certo valor para a discrepância entre a característica mínima e a dimensão triangular ocorra?

A resposta a esta afirmação é verdadeira.

Como vimos na proposição 2.18, quando temos um padrão da forma

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$mr(P) = mr(P_1) + mr(P_2).$$

Há um resultado similar, de Johnson e Zhang [24], quando nos estamos a referir à dimensão triangular.

Proposição 5.1 *Seja $P_{m\times n}$ um padrão da forma*

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

em que P_i é $m_i \times n_i$, $i = 1, 2$, $\sum m_i = m$ e $\sum n_i = n$.
Então,

$$MT(P) = MT(P_1) + MT(P_2).$$

Exemplo 5.2 *Como vimos atrás, a matriz F_4 do Plano Projectivo de Fano tem dimensão 7, $mr(F_4) = 4$ e $MT(F_4) = 3$.*
Se considerarmos

$$P_1 = P_2 = F_4,$$

pelos resultados acima, a matriz P é tal que

$$mr(P) = 8 \text{ e } MT(P) = 6.$$

Neste caso, a diferença é 2.

Este é um exemplo em que $t(m, n, k) = k - 2$, mas não é necessariamente o mais pequeno.

Por indução, podemos criar um padrão diagonal com blocos que seja a soma directa de j Planos Projectivos de Fano.

Assim, um limite superior para $t(m, n, k) = k - j$ é $m, n \leq 7j$ e $k \leq 4j$.

Nas duas secções que se seguem vamos iniciar a procura dos mais pequenos valores de m, n e k para os quais a discrepância entre os valores da característica mínima e da dimensão triangular é 2. Este estudo não é conclusivo pois serão apenas estudados dois casos: o caso em que $k = 4$ e o caso em que $k = 5$, com $5 \leq m = n \leq 8$.

Com isto, apenas iremos mostrar que

$$t(m, n, 4) \neq 2$$

e que para $5 \leq m = n \leq 8$,

$$t(m, n, 5) \neq 3.$$

Os restantes casos ficarão em aberto para um trabalho futuro.

5.1 2 - triângulo

Seja P um padrão $m \times n$ e $mr(P) = 4$.

Sabemos que

$$mr(P) \leq \begin{cases} n + 1 - r_1 \\ m + 1 - c_1. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, seja

$$mr(P) \leq m + 1 - c_1.$$

Como $mr(P) = 4$, tem-se

$$4 \leq m + 1 - c_1,$$

donde,

$$c_1 \leq m - 3.$$

Isto quer dizer que o número máximo de $*$'s numa coluna é $m - 3$. Isto é, uma coluna tem que ter no mínimo 3 zeros.

Consideremos o seguinte exemplo:

$$P = \left[\begin{array}{c|ccccc} * & ? & ? & & ? & \cdots \\ \cdots & ? & ? & & ? & \cdots \\ * & ? & ? & & ? & \cdots \\ \hline 0 & & & & & \\ 0 & & & P_{2,2} & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right]$$

O subpadrão $P_{2,2}$ não pode ter 0's, senão juntamente com a primeira coluna vai formar um 3 - triângulo no padrão P. Assim, as três últimas linhas teriam de ser iguais, o que não pode acontecer pois o padrão P é standard. Conclui-se então que não existe um padrão quadrado standard P tal que $mr(P) = 4$ e P só contém um 2 - triângulo.

5.2 3 - triângulo

Seja P um padrão $m \times n$ e $mr(P) = 5$.

Sabemos que

$$mr(P) \leq \begin{cases} n + 1 - r_1 \\ m + 1 - c_1. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, seja

$$mr(P) \leq m + 1 - c_1.$$

Como $mr(P) = 5$, tem-se

$$5 \leq m + 1 - c_1,$$

donde,

$$c_1 \leq m - 4.$$

Isto quer dizer que o número máximo de $*$'s numa coluna é $m - 4$. Isto é, uma coluna tem que ter no mínimo 4 zeros.

Caso $m = n = 5$:

Por observação da tabela, temos um 5 - triângulo.

Caso $m = n = 6$:

Por observação da tabela, temos um 5 - triângulo.

Por observação da tabela, para matrizes quadradas, só a partir de 7×7 é que temos menor que 5 - triângulo (pelas tabelas que nos dão a informação se $t(m, n, k) = k$ ou $t(m, n, k) < k$). Portanto, são estes casos que nos interessam.

No entanto, para $m = n = 7$, sabemos que $t(m, n, k) = 4$. Portanto, interessam-nos os casos em que $m = n > 7$.

Consideremos $m = n = 8$.

Como

$$c_1 \leq m - 4,$$

então,

$$c_1 \leq 8 - 4,$$

donde,

$$c_1 \leq 4.$$

Isto quer dizer que o número máximo de $*$'s numa coluna é 4. Isto é, uma coluna tem que ter no mínimo 4 zeros.

Se considerarmos um padrão com a primeira coluna nula, então não é um padrão standard. Este caso não nos interessa.

Comecemos por construir um padrão em que a primeira coluna tem um só $*$:

$$P = \begin{bmatrix} * & ? & ? & & ? & \cdots \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & P_1 & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

Nestas condições, $mr(P) = 1 + mr(P_1)$. Portanto, $mr(P_1) = 4$. Como P_1 é um padrão 7×7 e $mr(P_1) = 4$, então P_1 contém um 3 - triângulo. Logo, P não pode conter apenas um 3 - triângulo como nós procuramos.

Construamos um padrão em que a primeira coluna tem dois $*$'s:

$$P = \left[\begin{array}{c|cccc} * & ? & ? & ? & \cdots \\ \hline * & ? & ? & ? & \cdots \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & P_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cccc} * & ? & ? & ? & \cdots \\ \hline 0 & ? & ? & ? & \cdots \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & P_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

A parte inferior direita, o padrão 7×7, deve ter $mr = 4$ depois da redução. Portanto, tem um 3 - triângulo. Logo, P não pode conter apenas um 3 - triângulo como nós procuramos.

Resta-nos apenas considerar os casos em que a primeira coluna de P tem três ou quatro $*$'s.

Consideremos o caso de três $*$'s (o outro é similar):

$$P = \left[\begin{array}{c|cccc} * & ? & ? & ? & \cdots \\ \hline * & ? & ? & ? & \cdots \\ * & ? & ? & ? & \cdots \\ 0 & & & & \\ 0 & & P_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cccc} * & ? & ? & ? & \cdots \\ \hline 0 & ? & ? & ? & \cdots \\ 0 & ? & ? & ? & \cdots \\ 0 & & & & \\ 0 & & P_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

A parte inferior direita, o padrão 7×7, deve ter $mr = 4$ depois da redução. Portanto, tem um 3 - triângulo. Logo, P não pode conter apenas um 3 - triângulo como nós procuramos.

5.3 Tabelas m, n, k

A tabela seguinte dá informação acerca de padrões quadrados. Na tabela, Y indica que $t(m, n, k) = k$ e N indica que $t(m, n, k) < k$. As linhas da tabela representam os valores de k. As setas indicam que os Y's e os N's continuam nessa direcção indefinidamente.

$m = n$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
1	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
2		Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
3			Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
4				Y	Y	Y	N	N	N	N	$\rightarrow$
5					Y	Y	N	N	N	$\downarrow\rightarrow$	$\rightarrow$
6						Y	N	N	N	$\downarrow\rightarrow$	$\rightarrow$
7							Y	N	N	$\downarrow\rightarrow$	$\rightarrow$
8								Y	N	$\downarrow\rightarrow$	$\rightarrow$
9									Y	$\downarrow\rightarrow$	$\rightarrow$
$\cdots$									..		

Mas o que se passa com os padrões não quadrados?

De seguida, apresentamos toda a informação recolhida acerca dos padrões não quadrados.

Nas tabelas que se seguem, pomos Y na posição (m, n, k) se $t(m, n, k) = k$, pomos N se $t(m, n, k) < k$ e, deixamos o espaço em branco se o valor de k excede ambas as dimensões do padrão.

Sabemos que para qualquer m, $n \geq 3$, $t(m, n, 3) = 3$ e que se $m \leq n$, então $t(m, n, m) = m$.

Nas tabelas que se seguem, para os diversos valores de k, as linhas representam m e as colunas n.

$k = 1$

	1	2	3	4	$\cdots$
1	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
2	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
3	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
4	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\rightarrow$

$k = 2$

	1	2	3	4	$\cdots$
1					$\rightarrow$
2		Y	Y	Y	$\rightarrow$
3		Y	Y	Y	$\rightarrow$
4		Y	Y	Y	$\rightarrow$
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\rightarrow$

$k = 3$

	1	2	3	4	$\cdots$
1					$\rightarrow$
2					$\rightarrow$
3			Y	Y	$\rightarrow$
4			Y	Y	$\rightarrow$
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\rightarrow$

$k = 4$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
1											$\rightarrow$
2											$\rightarrow$
3											$\rightarrow$
4				Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
5				Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
6				Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
7				Y	Y	Y	N	N	N	N	$\rightarrow$
8				Y	Y	Y	N	N	N	N	$\rightarrow$
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\rightarrow$

$k = 5$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
1											$\rightarrow$
2											$\rightarrow$
3											$\rightarrow$
4											$\rightarrow$
5					Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
6					Y	Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
7					Y	N	N	N	N	N	$\rightarrow$
8					Y	Y	N	N	N	N	$\rightarrow$
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\rightarrow$

$$k = 6$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
1											$\rightarrow$
2											$\rightarrow$
3											$\rightarrow$
4											$\rightarrow$
5											$\rightarrow$
6						Y	Y	Y	Y	Y	$\rightarrow$
7						Y	N	N	N	N	$\rightarrow$
8						Y	N	N	N	N	$\rightarrow$
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow\rightarrow$

Este padrão (a matriz com Y's na linha e coluna k, N's abaixo e para a direita destes Y's e espaços brancos por cima e para o lado esquerdo destes) continua para todo k. Assim, podemos completar a tabela para todos os padrões $m \times n$ com característica mínima k.

Capítulo 6

Padrões de sinais

Um padrão de sinais é uma matriz cujas entradas são $+$'s, $-$'s ou 0's. A característica mínima dos padrões de sinais P é o mínimo das características das matrizes com entradas reais que têm sinais iguais às entradas correspondentes em P.

Dada uma matriz real A, $sgn(A)$ é o padrão de sinais obtido substituindo cada entrada positiva (respectivamente, negativa, zero) de A por $+$ (respectivamente, $-$, 0).

Para um padrão de sinais P, a classe de padrões de sinais de P é definida por

$$\mathcal{Q}(P) = \{Q : sgn(Q) = P\}.$$

Arav et al [2], em 2005, conjecturaram que a característica mínima de uma padrão de sinais pode ser encontrada com uma matriz cujas entradas são racionais.

Conjecturaram também que em alguns casos especiais tais como, quando o padrão P tem as entradas não nulas, quando a característica mínima de P é no máximo 2 ou quando a característica mínima de P é no mínimo $n-1$

(sendo P um padrão $m \times n$), que esta conjectura se mantém.

Fizeram então a seguinte conjectura:

Para todo o padrão de sinais $P_{m\times n}$ com $mr(P) = k$, existe uma matriz racional (equivalentemente, uma matriz inteira) $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = k$.

Salientaram ainda que esta conjectura é válida apenas em alguns casos não estando ainda completamente estudada.

De seguida serão apresentadas as conjecturas formuladas por Arav et al [2].

6.1 Conjecturas

Considere-se a seguinte conjectura que se considerará a conjectura original.

Conjectura 6.1 *Dado um padrão de sinais $P_{m\times n}$ com $mr(P) = k$, existe uma matriz racional (equivalentemente, uma matriz inteira) $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = k$.*

Em seguida são apresentadas mais três conjecturas equivalentes à conjectura original.

Conjectura 6.2 *Dada uma matriz real*

$$B = \begin{bmatrix} I_r & C \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

com $r = c(B)$, existe uma matriz racional F tal que $sgn(F) = sgn(B)$ e $c(F) = r$.

Conjectura 6.3 *Dadas matrizes reais D e C com $DC = 0$, existem matrizes racionais D^* e C^* tais que*

$$sgn(D^*) = sgn(D),\ sgn(C^*) = sgn(C)\ e\ D^*C^* = 0.$$

Conjectura 6.4 Dadas matrizes reais D, C e E com $DC = E$, existem matrizes racionais D^*, C^* e E^* tais que

$$sgn(D^*) = sgn(D),\ sgn(C^*) = sgn(C),\ sgn(E^*) = sgn(E) \text{ e } D^*C^* = E^*.$$

Teorema 6.5 *[2] As conjecturas acima (6.1 - 6.4) são equivalentes.*

6.2 Casos especiais

Arav et al [2] mostraram ainda que as conjecturas por eles apresentadas eram verdadeiras quando a característica mínima do padrão era 1, 2, $n-1$ ou n. Mostraram os resultados que a seguir se enunciam.

Proposição 6.6 *Dado um padrão $P_{m\times n}$ com $mr(P) = 1$, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = 1$.*

Proposição 6.7 *Dado um padrão $P_{m\times n}$ com $mr(P) = n$, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = n$.*

Lema 6.8 *Dado um padrão $P_{m\times n}$ com $mr(P) \leq n-1 \leq MR(P)$, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = n-1$.*

Deste lema seguem os seguintes resultados.

Teorema 6.9 *Dado um padrão $P_{m\times n}$ com $mr(P) = n-1$, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = n-1$.*

Temos ainda um resultado para o caso da característica mínima ser igual a 2.

Teorema 6.10 *Dado um padrão $P_{m\times n}$ com $mr(P) = 2$, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = 2$.*

A conjectura original mantém-se válida se P não tem mais do que quatro linhas ou mais do que quatro colunas.

Corolário 6.11 *Dado um padrão $P_{m\times n}$, onde $m \leq 4$ ou $n \leq 4$, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = mr(P)$.*

Para um padrão P que admite uma matriz $Q \in \mathcal{Q}(P)$ com uma certa estrutura, a conjectura original também se mantém. E, neste sentido, temos os seguintes resultados.

Teorema 6.12 *Se*

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix},$$

onde P_1 é $r \times r$, $c(P) = c(P_1) = r$ e P_4 tem as entradas não nulas, então existe uma matriz racional Q tal que $sgn(Q) = sgn(P)$ e $c(Q) = r$.

Como consequência deste teorema, tem-se o seguinte:

Teorema 6.13 *Se P é um padrão com as entradas não nulas, existe uma matriz racional $Q \in \mathcal{Q}(P)$ tal que $c(Q) = mr(P)$.*

A seguir faz-se a conecção entre as matrizes racionais e os sistemas de equações polinomiais.

6.3 Sistemas de equações polinomiais

Considerem-se duas matrizes D e C tais que $DC = 0$, como na Conjectura 6.3. Representando as entradas positivas de D e de C por diferentes variáveis independentes (desconhecidas) e representando as entradas negativas de D e C pelo simétrico de outras variáveis independentes, obtém-se uma equação matricial $\tilde{D}\tilde{C} = 0$.

Os resultados e exemplos a seguir referidos são de Arav et al [2], onde podem ser consultados.

Considere-se o seguinte exemplo:

Exemplo 6.14 *Considerem-se as seguintes matrizes*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -3 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Considere-se a seguinte equação matricial inicial

$$DC = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -3 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Depois de fazermos as substituições referidas acima, obtemos a seguinte equação matricial

$$\tilde{D}\tilde{C} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 \\ x_5 & -x_6 & -x_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \\ -y_5 & 0 \\ 0 & y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$\begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_5 & x_1y_2 + x_2y_4 - x_4y_6 \\ x_5y_1 - x_6y_3 + x_7y_5 & x_5y_2 - x_6y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observando as equações acima, reparamos que temos um sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas onde cada coeficiente das variáveis é -1 ou 1. Este sistema tem uma solução positiva (uma solução com todas as variáveis positivas). E, pela conjectura 6.3, o sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas tem uma solução racional positiva.

Na equação matricial $DC = 0$, D e C são matrizes genéricas, em que cada entrada não nula é representada por variáveis diferentes ou pelo simétrico de variáveis diferentes. Neste sentido, enuncia-se uma versão polinomial equivalente da Conjectura 6.3.

Conjectura 6.15 *Sejam $D_{m\times k}$ e $C_{k\times n}$ matrizes em que as entradas não nulas são representadas por variáveis diferentes ou pelo simétrico de variáveis diferentes. Se o sistema homogéneo de equações quadráticas $DC = 0$ tem uma solução positiva, então tem uma solução racional positiva.*

Então há uma questão que se coloca:

Questão 6.16 *Consideremos um sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas onde cada termo diferente de zero envolve o produto de duas variáveis distintas e cada coeficiente em cada equação é -1 ou 1. Suponhamos que o sistema tem uma solução positiva. É necessário ter uma solução racional positiva?*

Se a resposta a esta questão é "sim", então a Conjectura 6.15 e, consequentemente, a Conjectura 6.3 são verdadeiras. Contudo, a resposta à Questão 6.16 é negativa.

Apresenta-se a seguir um exemplo para exemplificar a não veracidade da Questão 6.16.

Exemplo 6.17 *O sistema homogéneo de equações quadráticas polinomiais*

$$xy + xz - yw = 0, \tag{6.1}$$

$$xw + yz - zw = 0, \tag{6.2}$$

$$yz - xz - yw = 0, \tag{6.3}$$

tem uma solução positiva. Mas, não tem uma solução racional positiva.

Consideremos alguma solução não trivial do sistema com $y \neq 0$. Dado que o sistema é homogéneo, dividindo o valor de cada variável pelo valor de y, obtemos uma solução com $y = 1$. Portanto, sem perda de generalidade, vamos assumir que $y = 1$.
Substituindo y por 1 nas equações (6.1) - (6.3), obtemos

$$x + xz - w = 0, \tag{6.4}$$

$$xw + z - zw = 0, \tag{6.5}$$

$$z - xz - w = 0. \tag{6.6}$$

Das equações (6.4) e (6.6), temos

$$x - z + 2xz = 0 \text{ ou } z = \frac{x}{1-2x}.$$

Substituindo $w = x + xz$ (de (6.4)) em (6.5), obtemos

$$x(x + xz) + z - z(x + xz) = 0.$$

Ou seja,

$$x^2 + x^2z + z - xz - xz^2 = 0. \tag{6.7}$$

Substituindo $z = \frac{x}{1-2x}$ *em (6.7) e simplificando a equação resultante, obtemos*

$$x(2x^3 - 2x^2 - 2x + 1) = 0. \tag{6.8}$$

Assim, toda a solução do sistema com $y = 1$ *é dada por*

$$(x, y, z, w) = \left(x, 1, \frac{x}{1-2x}, \frac{x(1-x)}{1-2x}\right),$$

onde x *satisfaz (6.8).*
Repare-se que a solução é positiva se e só se $0 < x < 1/2$*. Pelo Teorema do Valor Intermédio, (6.8) tem uma solução no intervalo aberto* $]0, 1/2[$*, que nos dá a solução positiva do sistema homogéneo.*
Porém , (6.8) não tem uma solução racional no intervalo $]0, 1/2[$ *e, portanto, o sistema homogéneo não tem uma solução racional positiva com* $y = 1$*. E, consequentemente, o sistema homogéneo não tem uma solução racional positiva.*

O sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas que surge a partir da equação matricial da forma $DC = 0$ é bastante restritivo. Em particular, tal sistema deve satisfazer as seguintes condições:

(i) Cada coeficiente em qualquer equação é -1 ou 1;

(ii) Cada termo não nulo em qualquer equação envolve o produto de duas variáveis distintas;

(iii) Cada variável pode ocorrer no máximo num termo de qualquer equação do sistema;

(iv) O conjunto de variáveis pode ser particionado em $X \cup Y$ tal que cada termo numa equação envolve o produto de uma variável em X e uma variável em Y.

Visto que o sistema do exemplo 6.17 não satisfaz a condição (iii), não pode advir de uma equação matricial $DC = 0$.

Se só estão em causa soluções positivas, o sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas com alguns termos quadrados pode ser transformado num sistema homogéneo de equações quadráticas equivalente sem termos quadrados. Por exemplo, o termo quadrado x^2 pode ser substituído por xx_1 tal que $y(x - x_1) = 0$. Esta ideia é ilustrada com o seguinte exemplo:

Exemplo 6.18 *Se só estamos interessados em soluções positivas, o sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas*

$$x^2 - y^2 = 0 \tag{6.9}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{6.10}$$

é equivalente ao seguinte sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas sem termos quadrados

$$xx_1 - yy_1 = 0 \tag{6.11}$$

$$xx_1 + yy_1 - zz_1 = 0 \tag{6.12}$$

$$y(x - x_1) = 0 \tag{6.13}$$

$$z(y - y_1) = 0 \tag{6.14}$$

$$x(z - z_1) = 0. \tag{6.15}$$

Além disso, o sistema (6.9)-(6.10) tem uma solução positiva e, portanto, o sistema (6.11)-(6.15) tem uma solução positiva. Mas, não tem uma solução racional positiva.

Note-se que o sistema (6.11)-(6.15) não pode surgir de uma equação matricial pois a condição (iii) não é satisfeita.

O sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas na forma standard com uma solução positiva deve satisfazer a seguinte condição:

(v) Cada equação contém um termo positivo e um termo negativo.

Para termos um sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas que satisfaçam (i)-(v), o número de variáveis deve ser pelo menos 4. No caso de 4 ou 5 variáveis (denotadas por $x_1, \ldots, x_5$), cada equação do sistema homogéneo de equações polinomiais quadráticas que satisfaz (i)-(v) deve ser da forma

$$x_i x_j - x_k x_l = 0,$$

e, portanto, reduzir todas as variáveis a 1 produz uma solução racional positiva.

6.4 Contra-exemplo

Após cerca de dois anos de Arav et al [2] terem conjecturado que a característica mínima de todos os padrões de sinais pode ser encontrada com uma matriz racional, Kopparty et al [25] encontraram um contra-exemplo. Para tal, usaram uma das equivalências da conjectura e alguns resultados da geometria projectiva. Como consequência do contra-exemplo mostram ainda que existe um grafo cuja característica mínima sobre os reais é estritamente menor que a característica mínima sobre os racionais.

Considere-se a seguinte notação:

- Se P é um padrão e F é um subcorpo de $\mathbb{R}$, a *classe de padrões de sinais* sobre F é definida por

  $\mathcal{Q}^F(P) = \{Q \,:\, Q$ é uma matriz com as entradas em F e $sgn(Q) = P\}$.

- Dado um padrão P e um subcorpo F de $\mathbb{R}$, a *característica mínima* de P sobre F, $mr^F(P)$, define-se como

$$mr^F(P) = \min_{Q \in \mathcal{Q}^F(P)} \{c(Q)\}.$$

Arav et al [2] fizeram a seguinte conjectura:

Para todo o padrão $P_{m\times n}$, $mr^{\mathbb{R}}(P) = mr^{\mathbb{Q}}(P)$.

Mostraram que esta conjectura se mantém em alguns casos especiais e que é equivalente a outras conjecturas, nomeadamente,

Para todas as matrizes reais D, C e E com $DC = E$, existem matrizes racionais D^*, C^* e E^* tais que $sgn(D^*) = sgn(D)$, $sgn(C^*) = sgn(C)$, $sgn(E^*) = sgn(E)$ e $D^*C^* = E^*$.

Mas, Kopparty et al [25] dão um exemplo em que mostram que esta conjectura não é verdadeira e mostram que existe um grafo cuja característica mínima sobre os reais é estritamente menor que a característica mínima sobre os racionais.

Considere-se o seguinte exemplo de Kopparty et al [25]:

Exemplo 6.19 *Consideremos a configuração $\mathcal{C}$ de nove pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, e nove linhas ABEF, ADG, AHI, BCH, BGI, CEG, CFI, DEI, DFH, como mostra na figura 6.1.*

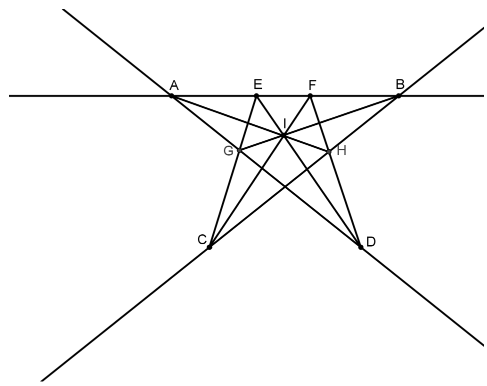


Figura 6.1: A configuração consiste em nove pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, e nove linhas ABEF, ADG, AHI, BCH, BGI, CEG, CFI, DEI, DFH desenhadas no plano, começando com um pentágono regular sendo G, E, F, H quatro dos seus vértices.

Sejam $l_1, l_2, \ldots, l_9$ as nove linhas da figura 6.1 e seja

$$a_i x + b_i y + c_i = 0$$

a equação para l_i*,* $i = 1, 2, \ldots, 9$*.*

Sejam (x_i, y_i)*,* $i = 1, 2, \ldots, 9$*, os nove pontos com coordenadas reais.*

Seja D *uma matriz* 9×3 *cuja i-ésima linha é* (a_i, b_i, c_i) *e* C *uma matriz* 3×9 *cuja j-ésima coluna é a transposta da linha* $(x_i, y_i, 1)$*. Seja* $DC = E$*. A matriz* E *é uma matriz* 9×9 *cujo* (i, j)*-ésimo elemento é 0 se o j-ésimo ponto está sobre a i-ésima linha e é diferente de 0 se o j-ésimo ponto não está sobre a i-ésima linha. A incidência dos 9 pontos nas 9 linhas está definida pelos elementos nulos e não nulos de* E*.*

Segundo Grunbaum [16], a estrutura de incidência $\mathcal{C}$ *não pode ser feita com nove pontos com coordenadas racionais.*

Suponhamos agora que existem matrizes racionais D^**,* C^* *e* E^* *tais que* $D^*C^* = E^*$ *e que o padrão* E^* *tem entradas nulas e não nulas nas mesmas posições que o padrão* E*.*

Visto que a terceira linha de C^* *tem elementos não nulos, dividindo cada coluna de* C^* *e a correspondente coluna de* E^* *por um número racional diferente de zero, podemos assumir que a terceira linha de* C^* *tem tudo* 1*'s.*

Seja a j-ésima coluna de C^* *a transposta de* $(x_j^*, y_j^*, 1)$*.*

Se D^* *é uma matriz* 9×3 *cuja i-ésima linha é* (a_i^*, b_i^*, c_i^*)*, então o j-ésimo ponto* (x_j^*, y_j^*) *vai estar na linha* $a_i^* x + b_i^* y + c_i^* = 0$ *se e só se* (x_j, y_j) *está em* l_i*,* $i = 1, 2, \ldots, 9$*. Isto porque* $D^*C^* = E^*$ *e os padrões* E^* *e* E *têm entradas nulas e não nulas nas mesmas posições.*

Portanto, (a_i^*, b_i^*)*,* $i = 1, 2, \ldots, 9$*, vai ter nove pontos com coordenadas racionais com a mesma estrutura de* $\mathcal{C}$*.*

Consequentemente, não existem matrizes racionais D^**,* C^* *e* E^* *tais que* $D^*C^* = E^*$ *e que o padrão* E^* *tenha entradas nulas e não nulas nas mesmas posições que o padrão* E*.*

Assim, não existem matrizes racionais D^**,* C^* *e* E^* *tais que* $D^*C^* = E^*$*,* $sgn(D^*) = sgn(D)$*,* $sgn(C^*) = sgn(C)$ *e* $sgn(E^*) = sgn(E)$*.*

O procedimento acima dá-nos uma matriz real 12×12

$$B = \begin{bmatrix} I_3 & C \\ D & E \end{bmatrix},$$

tal que $c(B) = 3$*, para a qual não existe uma matriz racional* F *tal que* $c(F) = 3$ *e* F *e* B *são padrões com as mesmas entradas nulas e não nulas.*

Se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

então A *é uma matriz real simétrica* 24×24 *para a qual não existe uma matriz racional* A^* *tal que* $sgn(A) = sgn(A^*)$ *e* $c(A) = c(A^*)$*. Esta, por sua vez, dá-nos um grafo bipartido* G *de 24 pontos (com 12 pontos em cada lado) cuja matriz de incidência tem um padrão de entradas nulas e não nulas de* A*. Para este grafo, a característica mínima sobre os racionais é estritamente maior que a característica mínima sobre os reais (esta característica é 6).*

Capítulo 7

Problemas em aberto

Apresentamos de seguida alguns problemas em aberto que serão tema de trabalho para futura investigação na área de Teoria Qualitativa de Matrizes.

1. Além do padrão do Plano Projectivo de Fano, existem outros padrões 7×7 com $MT = 3$ e $mr = 4$?

2. Existem padrões 7×7 com $MT = 4$ e $mr = 5$?

3. O padrão F_4 tem o máximo número de zeros entre os padrões standard 7×7 sem ter um 4-triângulo. Mas, podem existir exemplos com menos 0's?

4. Quantos padrões 7×7 é que existem com dimensão triangular 3, 4, ou 5 e característica mínima 4, 5 ou 6, respectivamente?

5. Há um processo fácil para dizer quando existe uma solução da equação do complemento de Schur totalmente não nula?

6. Sobre $\mathbb{R}$, $MT(P) = 3$ não implica que $mr(P) = 3$ pois $MT(F_4) = 3$ e $mr(F_4) = 4$. Existe uma discrepância ou salto de distância um. Quando é que ocorre o primeiro salto de distância dois? Isto é, existe um padrão com $MT = 3$ e $mr = 5$? E, em caso afirmativo, quais são as mais pequenas dimensões do padrão com esta propriedade? Quando

acontece o primeiro salto de distância três? Quando acontece o primeiro salto de distância $j \geq 4$?

7. Se no ponto anterior trocarmos $\mathbb{R}$ por GF_2, quais são as mais pequenas dimensões dos padrões?

8. Outra interpretação para o salto é um padrão com $MT = k$ e $mr = k+j$ onde j é o salto. Por exemplo, quando $j = 1$, o primeiro salto ocorre no padrão F_4 dado que $MT(F_4) = 3$ e $mr(F_4) = 3 + 1 = 4$. Existe um limite superior para a distância j do salto dado que podemos fazer somas directas de j padrões (F_4) no bloco diagonal do padrão P e calcular $MT(P) = 3j$ e $mr(P) = 4j$. Porém, quais são as dimensões do padrão onde os primeiros saltos ocorrem? A resposta é mais do que $7j$. Mas quanto?

9. Dado que $mr(F_4) = 4$ onde os reais são substituídos por GF_2, pode perguntar-se: que padrões podem ter valores diferentes para a dimensão triangular e a característica mínima em todos os corpos?

10. Qual é a relação geral entre característica mínima sobre $\mathbb{R}$ e $mr(P) = c(P)$ sobre GF_2?

11. Sob que circunstâncias a adição de linhas a um padrão não altera a característica mínima?

12. Pode uma linha ser adicionada a um padrão não alterando a característica mínima mas alterando a dimensão triangular em 1 unidade?

Bibliografia

[1] N. Alon, V.D. Milman, *Isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators*, J. Combin. Theory Ser. B 38 (1985) (1), 73-88.

[2] M. Arav, F. J.Hall, S. Koyuncu, Z. Li,B. Rao, *Rational realizations of the minimum rank of a sign pattern matrix*, Linear Algebra and Its Applications, 409 (2005) 111-125.

[3] F. Barioli, S. M. Fallat, H. T. Hall, D. Hershkowitz, L. Hogben, H. V. D. Holst, B. Shader, *On the Minimum Rank of Not Necessarily Symmetric Matrices: a Preliminary Study*, Electronic Journal of Linear Algebra, 18 (2009) 126-145.

[4] W. Barrett, H. Van der Holst, R. Loewy, *Graphs whose minimal rank is two*, Electron. J. Linear Algebra 11 (2004), 258-280.

[5] L. Basset, J. Maybee, J. Quick, *Qualitative economics and the scope of the correspondence principle*, Econometrica, 36 (1968), 544-563.

[6] A. Berman, S. Friedland, L. Hogben, U. G. Rothblum, B. Shader, *An Upper Bound for the Minimum Rank of a Graph*, 2008.

[7] A. Berman, S. Friedland, L. Hogben, U. G. Rothblum, B. Shader, *Minimum Rank of Matrices Described by a Graph or Pattern Over the Rational, Real and Complex Numbers*, 2007.

[8] R.A. Brualdi, B.L. Shader, *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems*, Cambridge University Press, (1995).

[9] R. Cantó, C. R. Johnson, *The relationship between maximum triangle size and minimum rank for zero-nonzero patterns.*

[10] G. Chen, F.J. Hall, Z. Li, B. Wei, *On ranks of matrices associated with trees*, Graphs Combin. 19 (2003), 323-334.

[11] N. L. Chenette, S. V. Droms, L. Hogben, R. Mikkelson, O. Pryponova, *Minimum Rank of a Tree Over an Arbitrary Field*, Electronic Journal of Linear Algebra, 16 (2007) 183-186.

[12] L. DeLoss, J. Grout, L. Hogben, T. McKay, J. Smith, G. Tims, *Techniques for determining the minimum rank of a small graph*, 2008.

[13] P. Delsarte, Y. Kamp, *Low rank matrices with a given sign pattern*, SIAM J. Discrete Math. 2 (1989), 51-63.

[14] S. M. Fallat, L. Hogben, *The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: A survey*, Linear Algebra and Its Applications, 426 (2007) 558-582.

[15] Y. Gao, J. Li, *On the Potential Stability of Star Sign Pattern Matrices*, Linear Algebra and Its Applications, 327 (2001) 61-68.

[16] B. Grunbaum *Convex Polytopes*, Texts in Mathematics, Springer, 1967.

[17] F.J. Hall, Z. Li, B. Rao, *From Boolean to sign pattern matrices*, Linear Algebra Appl. 393 (2004), 232-251.

[18] D. Hershkowitz, H. Schneider, *Ranks of zero patterns and sign patterns*, Linear and Multilinear Algebra 34 (1993) (1), 3-19.

[19] L. Hogben, *Spectral graph theory and the inverse eigenvalue problem of a graph*, Electron. J. Linear Algebra 14 (2005), 12-31.

[20] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[21] C.R. Johnson, *Some outstanding problems in the theory of matrices*, Linear and Multilinear Algebra 12 (1982), 99-108.

[22] C. R. Johnson, A. L. Duarte, *The Maximum Multiplicity of an Eigenvalue in a Matrix whose Graph is a Tree*, Linear and multiplinear Algebra, 46 (1999) 139-144.

[23] C. R. Johnson, J. A. Link, *The extent which triangular sub-patterns explain minimum rank*, Discrete Applied Mathematics, 156 (2008) 1637-1651.

[24] C. R. Johnson, Y. Zhang, *On the possible ranks among matrices with a given pattern*, preprint

[25] S. Kopparty, K. P. S. B. Rao, *The Minimum Rank Problem: a Counterexample*, Linear Algebra and Its Applications, 428 (2008) 1761-1765.

[26] P. M. Nylen, *Minimum-Rank Matrices with Prescribed Graph*, Linear Algebra and Its Applications, 248 (1996) 303-316.

[27] P. Samuelson, *Foundations of economic analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

[28] G. Wiener, *Spectral Multiplicity and Splitting Results for a Class of Qualitative Matrices*, Linear Algebra Appl. 61 (1986) 15-29.